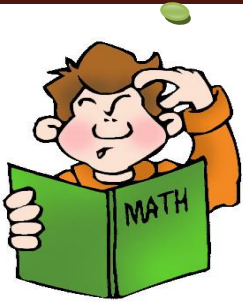


ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α ' ΛΥΚΕΙΟΥ - ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ ~ ΙΣΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

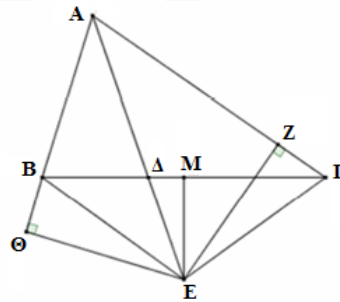


Δ ΘΕΜΑ ΙΣΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

ΘΕΜΑ 4_2787

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του παρακάτω σχήματος, η κάθετη από το μέσο M της $B\Gamma$ τέμνει την προέκταση της διχοτόμου AD στο σημείο E . Αν Θ, Z είναι οι προβολές του E στις $AB, A\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

- Το τρίγωνο $EB\Gamma$ είναι ισοσκελές.
- Τα τρίγωνα ΘBE και ZGE είναι ίσα.
- $\angle AGE + \angle ABE = 180^\circ$.



ΘΕΜΑ 4_3695

Έστω $AB\Gamma$ τρίγωνο και τα ύψη του BE και $\Gamma\Delta$ που αντιστοιχούν στις πλευρές $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα. Δίνεται η ακόλουθη πρόταση:

Π: Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB=A\Gamma$, τότε τα ύψη BE και $\Gamma\Delta$ που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσα.

- Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση **Π** αιτιολογώντας την απάντησή σας
- Να διατυπώσετε την αντίστροφη πρόταση της **Π** και να αποδείξετε ότι ισχύει.
- Να διατυπώσετε την πρόταση **Π** και την αντίστροφή της ως ενιαία πρόταση.

ΘΕΜΑ 4_3696

Δίνεται οξεία γωνία $\hat{\alpha}$ και δύο ομόκεντροι κύκλοι (O, ρ_1) και (O, ρ_2) με $\rho_1 < \rho_2$ που τέμνουν την $O\alpha$ στα σημεία K, A και την $O\beta$ στα σημεία Λ, B αντίστοιχα.

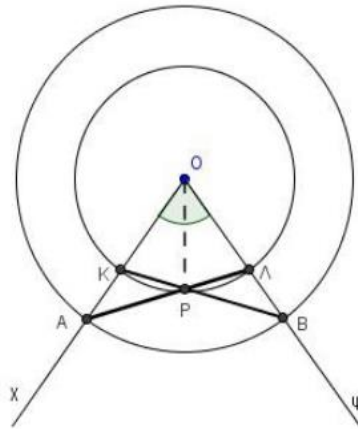
Να αποδείξετε ότι :

α) $A\Lambda = BK$

β) Το τρίγωνο APB είναι ισοσκελές, όπου το P είναι το σημείο τομής των $A\Lambda$ και BK .

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α ' ΛΥΚΕΙΟΥ - ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ ~ ΙΣΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

γ) Η ΟΡ διχοτομεί την \hat{xOy}



ΘΕΜΑ 4 _3726

Θεωρούμε δυο σημεία A και B τα οποία βρίσκονται στο ίδιο μέρος ως προς μια ευθεία (ϵ), τέτοια ώστε η ευθεία AB δεν είναι κάθετη στην (ϵ). Έστω A' το συμμετρικό του A ως προς την ευθεία (ϵ).

α) Αν η A'B τέμνει την ευθεία (ϵ) στο σημείο O, να αποδείξετε ότι:

- Η ευθεία (ϵ) διχοτομεί τη γωνία AOA'.
- Οι ημιευθείες OA και OB σχηματίζουν ίσες οξείες γωνίες με την ευθεία (ϵ)

β) Αν K είναι ένα άλλο σημείο πάνω στην ευθεία (ϵ), να αποδείξετε ότι:

- $KA=KA'$.
- $KA+KB>AO+OB$.

ΘΕΜΑ 4 _3728

Έστω κύκλος (O, ρ) εφάπτεται των πλευρών του τριγώνου PGE στα σημεία A, Δ και B.

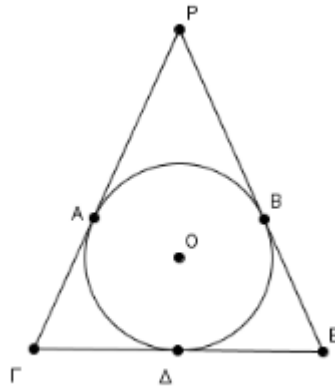
α) Να αποδείξετε ότι :

- $PG = G\Delta + AP$
- $PG - G\Delta = PE - \Delta E$

β) Αν $AG = BE$ να αποδείξετε ότι :

- Το τρίγωνο PGE είναι ισοσκελές
- Τα σημεία P, O και Δ είναι συνευθειακά

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α ' ΛΥΚΕΙΟΥ - ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ ~ ΙΣΑ ΤΡΙΓΩΝΑ



ΘΕΜΑ 4 _ 3732

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ύψος του $A\Delta$. Στο $A\Delta$ θεωρούμε σημείο H τέτοιο ώστε $HA=HB$. Έστω ότι E είναι το σημείο τομής της BH με την $A\Gamma$. Φέρνουμε την AZ κάθετη στην BE , η οποία τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο Θ .

α) Να αποδείξετε ότι:

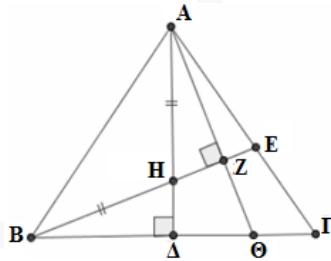
i. Τα τρίγωνα $H\Delta B$ και HZA είναι ίσα.

ii. $\Delta\Theta = \Theta Z$.

iii. Η ευθεία ΘH είναι μεσοκάθετος του τμήματος AB .

β) Ποιο από τα σημεία του σχήματος είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου AHB ;

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



ΘΕΜΑ 4 _ 4741

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$. Στην προέκταση της AB (προς το B) θεωρούμε σημείο E έτσι ώστε $AE=A\Gamma$. Στην πλευρά $A\Gamma$ θεωρούμε σημείο Δ έτσι ώστε $A\Delta=AB$. Αν τα τμήματα ΔE και $B\Gamma$ τέμνονται στο K και η προέκταση της AK τέμνει την $E\Gamma$ στο M .

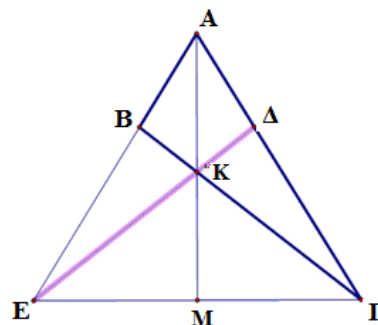
Να αποδείξετε ότι:

α) $B\Gamma = \Delta E$.

β) $BK = K\Delta$.

γ) Η AK είναι διχοτόμος της γωνίας A .

δ) Η AM είναι μεσοκάθετος της $E\Gamma$.



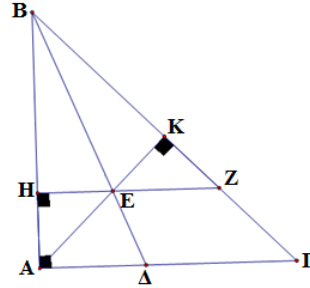
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α ' ΛΥΚΕΙΟΥ - ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ ~ ΙΣΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $B\Delta$ διχοτόμο και AK ύψος, που τέμνονται στο E . Η κάθετη από το E στην AB τέμνει τις AB και $B\Gamma$ στα H και Z αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. τα τρίγωνα EHA και EKZ είναι ίσα.
- ii. το τρίγωνο BKH είναι ισοσκελές τρίγωνο.
- iii. Οι AZ και $B\Delta$ είναι κάθετες.

β) Αν επιπλέον το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι και ισοσκελές, να αποδείξετε ότι η ΓE είναι διχοτόμος της γωνίας Γ .



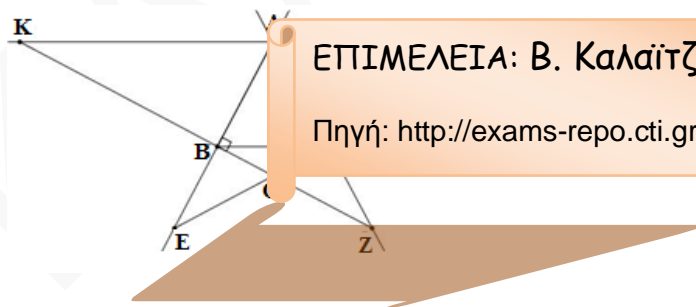
ΘΕΜΑ 2 _4806

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$, και την ευθεία ϵ της εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας A . Η κάθετη στην πλευρά AB στο B τέμνει την ϵ στο K και την ευθεία $A\Gamma$ στο Z . Η κάθετη στην πλευρά $A\Gamma$ στο Γ τέμνει την ϵ στο Λ και την ευθεία AB στο E .

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. $AZ=AE$
- ii. $AK=A\Lambda$

β) Ένας μαθητής κοιτώντας το σχήμα, διατύπωσε την άποψη ότι η $A\Theta$ είναι διχοτόμος της γωνίας A του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου Θ το σημείο τομής των KZ και $E\Lambda$. Συμφωνείτε με την παραπάνω σκέψη του μαθητή ή όχι; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.



ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Β. Καλαϊτζή

Πηγή: <http://exams-repo.cti.gr/>