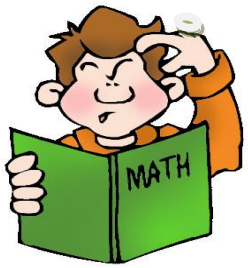


ΘΕΜΑΤΑ 2000-2014

ΘΕΜΑ 4ο – 2002

Έστω Α,Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με

$$P(A) + P(B) \neq 2P(A \cap B).$$

Δίνεται ακόμα η συνάρτηση: $f(x) = (x - P(A\cup B))^3 - (x - P(A\cap B))^3$, $x \in R$.

α. Να δείξετε ότι $P(A\cap B) \neq P(A\cup B)$. Μονάδες 5

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f(x) παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο $x = \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$. Μονάδες 13

γ. Εάν τα ενδεχόμενα Α, Β είναι ασυμβίβαστα, να δείξετε ότι f(P(A)) = f(P(B)).

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο -2004

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 2x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x + 10$. Οι πιθανότητες P(A) και P(B) δύο ενδεχομένων Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω είναι ίσες με τις τιμές του x, στις οποίες η f έχει αντίστοιχα τοπικό ελάχιστο και τοπικό μέγιστο.

Α. Να δείξετε οτι : $P(A) = \frac{1}{2}$ και $P(B) = \frac{1}{3}$ Μονάδες 9

Β. Για τις παραπάνω τιμές των P(A), P(B) καθώς και για $P(A\cup B) = \frac{2}{3}$ να βρείτε τις πιθανότητες:

i. $P(A\cap B)$ **ii.** $P(A-B)$

iii. $P[(A\cap B)']$ **iv.** $P(A-B)\cup(B-A)$

Μονάδες 16

Β.ΚΑΛΑΪΤΖΗ

ΘΕΜΑ 3ο -2005

Έστω Α, Β ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, ώστε να ισχύουν:

(i) Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα Α, Β είναι 7/8 .

(ii) Οι πιθανότητες P(B),P(A∩B) δεν είναι ίσες και ανήκουν στο σύνολο X={k, $\frac{1}{2},\frac{5}{4}$ }, όπου

$$k = \lim_{x \to 5} \frac{3x-15}{x^2-6x+5}$$

α. Να βρεθεί το k. Μονάδες 5

β. Να βρεθούν τα P(B), P(A∩B) και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. Μονάδες 8

γ. Να βρεθούν οι πιθανότητες:

(1) Να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο Α. Μονάδες 6

(2) Να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο Α. Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4ο -2005

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0 , +\infty)$

α. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο Λ(1,1).

Μονάδες 7

β. Από τυχαίο σημείο Μ (x, y) της γραφικής παράστασης της f φέρνουμε παράλληλες ευθείες προς τους άξονες xx΄ και yy΄, οι οποίες σχηματίζουν με τους ημιάξονες Ox, Oy ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου Μ, ώστε η περίμετρος του ορθογωνίου παραλληλογράμμου να είναι ελάχιστη.

Μονάδες 10

γ. Οι τετμημένες πέντε διαφορετικών σημείων της εφαπτομένης του ερωτήματος (α) έχουν μέση τιμή $\bar{x} = 5$ και τυπική απόκλιση Sx = 2.

Να βρεθεί η μέση τιμή $\bar{y}$ και η τυπική απόκλιση Sy των τεταγμένων των σημείων αυτών.

Β. ΚΑΛΑΪΤΖΗ

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4°-2006

Έστω η συνάρτηση $f(x) = -2x^2 + kx + 4\sqrt{x} + 10,\ x \geq 0$.

α. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο σημείο A(1,f(1)) είναι παράλληλη στον άξονα x΄x, να αποδείξετε ότι k=2 και να βρείτε την εξίσωσή της.

Μονάδες 5

β. Μία τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\bar{x} = f(1)$ και τυπική απόκλιση $s = -\frac{2f'(4)}{13}$.

Τρεις παρατηρήσεις, αντιπροσωπευτικού δείγματος μεγέθους ν, είναι μικρότερες ή ίσες του 8.

(i) Να βρείτε τον αριθμό των παρατηρήσεων που βρίσκονται στο διάστημα (10,16).

Μονάδες 10

(ii) Να αποδείξετε ότι το δείγμα των παρατηρήσεων που έχει ληφθεί, δεν είναι ομοιογενές. Να βρείτε τη μικρότερη τιμή της παραμέτρου α>0, που πρέπει να προστεθεί σε κάθε μία από τις προηγούμενες παρατηρήσεις, ώστε το δείγμα των νέων παρατηρήσεων να είναι ομοιογενές.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4⁰-2008

Το 50% των κατοίκων μιας πόλης διαβάζουν την εφημερίδα α, ενώ το 30% των κατοίκων διαβάζουν την εφημερίδα α και δεν διαβάζουν την εφημερίδα β.

α. Ποια είναι η πιθανότητα ένας κάτοικος της πόλης, που επιλέγεται τυχαία, να μη διαβάζει την εφημερίδα α ή να διαβάζει την εφημερίδα β;

Μονάδες 7

β. Ορίζουμε το ενδεχόμενο B: «ένας κάτοικος της πόλης που επιλέγεται τυχαία, διαβάζει την εφημερίδα β».

Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{5} \leq P(B) \leq \frac{7}{10}$

Μονάδες 9

γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο $f(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2+P(B)x$

όπου x πραγματικός αριθμός και B το ενδεχόμενο που ορίστηκε στο προηγούμενο ερώτημα. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f(x) δεν έχει ακρότατα.

Β.ΚΑΛΑΪΤΖΗ

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4^0-2009

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x-\frac{x}{2}+\lambda^2-6\lambda+2,\ \ x>0$ όπου λ ένας πραγματικός αριθμός.

Α. **α.** Να προσδιοριστεί το διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως αύξουσα και το διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Μονάδες 6

β. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τα ακρότατα.

Μονάδες 6

Β. Θεωρούμε ότι οι τιμές της συνάρτησης f(2), f(4), f(8), f(3) και f(5) είναι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής Χ.

α. Αν R είναι το εύρος και δ η διάμεσος των παρατηρήσεων, να δειχθεί ότι

$$R=3+\ln\frac{1}{4} \text{ και } \delta=\ln 4+\lambda^2-6\lambda$$

Μονάδες 7

β. Έστω ο δειγματικός χώρος Ω={1,2,3,…,100} ο οποίος αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα. Αν το λ παίρνει τιμές στο δειγματικό χώρο Ω, να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου

$$\mathrm{A}=\{\lambda\in\Omega \mid R+\delta<-2\}$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4^0-2010

Έστω Α, Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με αντίστοιχες πιθανότητες P(A), P(B) και η συνάρτηση

$$\mathrm{f(x)=\ln(x-P(A))-\frac{1}{2}(x-P(A))^2+P(B)\ ,\quad x>P(A)}$$

Δ.1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 13

Δ.2. Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $x_o=\frac{5}{3}$ με τιμή $f(x_o)=0$, να αποδείξετε ότι:

$$P(A)=\frac{2}{3} \text{ και } P(B)=\frac{1}{2}$$

Μονάδες 2

Λαμβάνοντας υπόψη το ερώτημα Δ2 και επιπλέον ότι $P(A\cup B)=\frac{5}{6}$, να βρείτε την πιθανότητα:

Δ.3. να μην πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα τα ενδεχόμενα Α , Β.

Β. ΚΑΛΑΪΤΖΗ

Μονάδες 5

Δ.4. να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα ενδεχόμενα Α , Β.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4^0-2011

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=e^{\frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)},\ x\in\mathbb{R}$$

Δ.1. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 8

Δ.2. Αν Α, Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $A\subseteq B$ και P(A), P(B) είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f να υπολογιστούν οι πιθανότητες $P(A\cap B)$, $P(A-B)$, $P(A\cup B)$, $P(B-A)$.

Μονάδες 8

Δ.3. Δίνεται η συνάρτηση

$$h(x)=e^{\frac{1}{5}x\left(\frac{3x^2}{2}-x-\frac{1}{3}\right)},\ x\in\mathbb{R}.$$

α) Να λυθεί η εξίσωση f(x) = h(x).

Μονάδες 3

β) Αν $x_1<x_2<x_3$ οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης και $v_i=2x_i+1$, i=1,2,3 οι συχνότητες των παρατηρήσεων x_i τότε να βρείτε τη μέση τιμή των παρατηρήσεων.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4^0-2012

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1+\ln^2 x}{x}$, x>0

Δ.1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα. Μονάδες 5

Δ.2. Έστω M(x,f(x)), x>0 σημείο της γραφικής παράστασης της f. Η παράλληλη ευθεία από το Μ προς τον άξονα y'y τέμνει τον ημιάξονα Ox στο σημείο K(x,0) και η παράλληλη ευθεία από το Μ προς τον άξονα x'x τέμνει τον ημιάξονα Oy στο σημείο Λ(0,f (x)). Αν Ο είναι η αρχή των αξόνων, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλόγραμμου ΟΚΜΛ γίνεται ελάχιστο, όταν αυτό γίνει τετράγωνο. Μονάδες 7

Δ.3. Έστω η ευθεία ε: y=λx+β, β≠10, η οποία είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Σ(1,f (1)). Θεωρούμε δέκα σημεία $(x_i\ ,y_i)$,

Β. ΚΑΛΑΪΤΖΗ

i=1,2,…,10 της ευθείας ε, τέτοια ώστε οι τετμημένες τους x_i να έχουν μέση τιμή $\bar{x}=10$ και τυπική απόκλιση $s_x=2$. Να βρείτε για ποιες τιμές του β το δείγμα των τεταγμένων y_i των δέκα σημείων είναι ομοιογενές.

Μονάδες 8

Δ.4. Αν Α και Β είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, τέτοια ώστε $A \neq \varnothing$ και $A \cap B \neq \varnothing$, τότε να αποδείξετε ότι

$$f(P(A)) + f(P(A \cap B)) \geq 2f(P(A \cup B))$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2^0-2013

Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ και τα ενδεχόμενα

$$A = \{\omega_1, \omega_4\} \text{ και } B = \{\omega_1, \omega_3\}$$

Για τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων $\{\omega_1\}$ και $\{\omega_3\}$ του Ω ισχύει ότι:

- $P(\omega_1) = -\frac{1}{2}\lim\limits_{x \to -1} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2}$

• Η $P(\omega_3)$ είναι ίση με το ρυθμό μεταβολής της f (x) ως προς x , όταν x=1, όπου

$$f(x) = \frac{x}{3}\ln x,\ x > 0$$

Β.1. Να αποδείξετε ότι $P(\omega_1) = \frac{1}{4}$ και $P(\omega_3) = \frac{1}{3}$

Μονάδες 10

Β.2. Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{3} \leq P(A') \leq \frac{3}{4}$, όπου Α′ το συμπληρωματικό του Α.

Μονάδες 7

Β.3. Αν $P(A') = \frac{3}{4}$, τότε να βρείτε τις πιθανότητες $P(\omega_2)$, $P(\omega_4)$, $P[(A-B) \cup (B-A)]$ και

$P(A'-B')$, όπου Β′ το συμπληρωματικό του Β . Μονάδες 8

Β. ΚΑΛΑΪΤΖΗ

ΘΕΜΑ 4^0-2013

Θεωρούμε τη συνάρτηση f(x) = xlnx + κ, x>0, όπου κ ακέραιος με κ > 1 και την εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (1,f(1)) , η οποία σχηματίζει με τους άξονες, τρίγωνο εμβαδού E , με E < 2

Δ.1. Να αποδείξετε ότι κ = 2 Μονάδες 5

Δ.2. Έστω x_1 , x_2 , ……x_{50} οι τετμημένες 50 σημείων της (ε) των οποίων οι αντίστοιχες τεταγμένες τους έχουν μέση τιμή $\bar{y}$ =31

α) Να αποδείξετε ότι $\bar{x}$ =30 (μονάδες 2)

β) Για τις τετμημένες των παραπάνω σημείων θεωρούμε ότι :

Κάθε μία από τις τετμημένες x_1 , x_2 , ……x_{20} αυξάνεται κατά 3, οι επόμενες 15 τετμημένες παραμένουν σταθερές και κάθε μία από τις υπόλοιπες ελαττώνεται κατά λ∈R με λ > 0.

Να βρείτε το λ, ώστε η νέα μέση τιμή των τετμημένων να είναι ίση με 31 (μονάδες 4)

Μονάδες 6

Δ.3. Αν $\frac{1}{e}$ <α<β<γ<e με $\alpha^{\alpha} \cdot \beta^{\beta} \cdot \gamma^{\gamma} = e^7$, τότε να βρείτε το εύρος R και τη μέση τιμή των τιμών f(α), f(β), f(γ), f(e), f΄ ($\frac{1}{e}$) , όπου f(x) = xlnx+ 2

Μονάδες 7

Δ.4. Θεωρούμε τον δειγματικό χώρο

$$\Omega = \left\{ t_n,\ n = 1,2,3,\ldots,30 :\ 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{10} < \frac{1}{e} < t_{11} < \ldots < t_{30} = 1 \right\}$$

με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, καθώς και τα ενδεχόμενα

A = { t ∈ Ω : η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (t , f(t)), να σχηματίζει με τον άξονα x′x οξεία γωνία },

B ={ t ∈ Ω: f(t)>f′(t)+1}, όπου f(t) = t lnt+2

Να βρεθούν οι πιθανότητες:

α) να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο A (μονάδες 3)

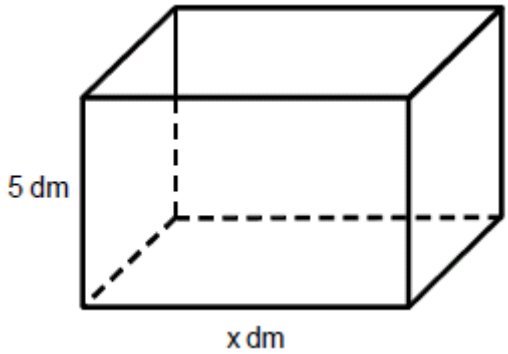
Β.ΚΑΛΑΪΤΖΗ

β) να πραγματοποιηθούν συγχρόνως τα ενδεχόμενα Α και Β (μονάδες 4)

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4^0-2014

Θεωρούμε ένα κουτί σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με βάση ορθογώνιο και **ανοικτό από πάνω**.



Το ύψος του κουτιού είναι 5 dm.
Η βάση του κουτιού έχει σταθερή περίμετρο 20 dm και μία πλευρά της είναι x dm με $0<x<10$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνολική επιφάνεια του κουτιού ως συνάρτηση του x είναι

$$E(x) = -x^2 + 10x + 100,\ x\in(0, 10)$$

και να βρείτε για ποια τιμή του x το κουτί έχει μέγιστη επιφάνεια.

Μονάδες 8

Στη συνέχεια, θεωρούμε τα σημεία $A_i(x_i,y_i)$, όπου $y_i = E(x_i)$, $i = 1, 2,...,15$
με $5 = x_1< x_2< ... < x_{14} < x_{15} = 9$

Δ2. Αν το δείγμα των τετμημένων x_i $i = 1, 2,...,15$ των παραπάνω σημείων $A_i(x_i,y_i)$

- δεν είναι ομοιογενές
- έχει μέση τιμή $\bar{x}=8$ και
- τυπική απόκλιση s τέτοια, ώστε

$$2s^2 - 5s + 2 = 0$$

τότε:

α) να αποδείξετε ότι $s = 2$

(μονάδες 4)

β) να βρείτε τη μέση τιμή των x_i^2 , με $i = 1, 2,...,15$

Β.ΚΑΛΑΪΤΖΗ

Δίνεται ότι: $s^2 = \frac{1}{v}\left\{\sum_{i=1}^{v} t_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{v} t_i\right)^2}{v}\right\}$

(μονάδες 4)

Μονάδες 8

Δ3. Επιλέγουμε τυχαία ένα από τα παραπάνω σημεία $A_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, ..., 15$

Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου:

$B = \{ A_i(x_i, y_i),\ i = 1, 2, ..., 15$ τέτοια, ώστε $y_i > -4x_i + 9R + 1\}$.

όπου R είναι το εύρος των $y_i = E(x_i)$, $i = 1, 2, ..., 15$

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3^0-2014

Ένα δοχείο περιέχει κόκκινες (Κ), άσπρες (Α) και πράσινες (Π) μπάλες. Επιλέγουμε τυχαία μία μπάλα. Η πιθανότητα να προκύψει κόκκινη μπάλα είναι $P(K) = x_1$, ενώ η πιθανότητα να προκύψει άσπρη μπάλα είναι $P(A) = x_2$, όπου x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης

$$f(x) = 4x^3 - \frac{7}{2}x^2 + x - 1,\ x \in \mathbb{R} \text{ με } x_1 < x_2$$

Γ1. Να βρείτε τις πιθανότητες P(K), P(A) και P(Π), όπου P(Π) η πιθανότητα να προκύψει πράσινη μπάλα.

Μονάδες 10

Γ2. Αν $P(K) = \frac{1}{4}$ και $P(A) = \frac{1}{3}$, να βρείτε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:

Γ: «η μπάλα που επιλέγεται τυχαία να είναι κόκκινη ή άσπρη»

Δ: «η μπάλα που επιλέγεται τυχαία να είναι ούτε κόκκινη ούτε άσπρη»

Ε: «η μπάλα που επιλέγεται τυχαία να είναι άσπρη ή να μην είναι πράσινη».

Μονάδες 9

Γ3. Αν οι άσπρες μπάλες είναι κατά τέσσερις (4) λιγότερες από τις πράσινες μπάλες, να βρείτε πόσες μπάλες έχει το δοχείο.

Μονάδες 6

Β. ΚΑΛΑΪΤΖΗ