

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ
ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β)
ΤΕΤΑΡΤΗ 20 ΜΑΪΟΥ 2015**

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο R , να αποδείξετε ότι

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x), \quad x \in R$$

Μονάδες 7

A2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

A3. Αν x_1, x_2, \dots, x_v είναι οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους v και w_1, w_2, \dots, w_v είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας), να ορίσετε τον σταθμικό μέσο της μεταβλητής X .

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α)** Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (a, b)$, $f'(x) > 0$ στο (a, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, b) , τότε η f παρουσιάζει ελάχιστο στο διάστημα (a, b) για $x = x_0$.
- β)** Ένα τοπικό ελάχιστο μιας συνάρτησης στο πεδίο ορισμού της μπορεί να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό μέγιστο.
- γ)** Η διακύμανση των παρατηρήσεων μιας ποσοτικής μεταβλητής X εκφράζεται με τις ίδιες μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις.
- δ)** Αν για τους συντελεστές μεταβολής των δειγμάτων **A** και **B** ισχύει $CV_B > CV_A$, τότε λέμε ότι το δείγμα **B** εμφανίζει μεγαλύτερη ομοιογένεια από **A**.
- ε)** Αν **A, B** είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , τότε η έκφραση «η πραγματοποίηση του **A** συνεπάγεται την πραγματοποίηση του **B**» δηλώνει ότι $A \subseteq B$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω A , B και Γ ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω . Οι πιθανότητες των ενδεχομένων A , $A \cap B$ και $A \cup B$ ανήκουν στο σύνολο λύσεων της εξίσωσης

$$(3x-1)(8x^2-6x+1) = 0.$$

Η πιθανότητα του ενδεχομένου Γ ανήκει στο σύνολο λύσεων της εξίσωσης

$$9x^2 - 3x - 2 = 0.$$

B1. Να αποδείξετε ότι $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ και $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$.

Μονάδες 5

B2. Να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(A' \cap B')$, καθώς επίσης και την πιθανότητα του ενδεχομένου

Δ: «πραγματοποιείται το πολύ ένα από τα ενδεχόμενα A και B ».

Μονάδες 8

B3. Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου

Ε: «πραγματοποιείται μόνο ένα από τα ενδεχόμενα A και B ».

Μονάδες 6

B4. Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα B και Γ είναι ασυμβίβαστα.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε ένα δείγμα ν παρατηρήσεων μιας συνεχούς ποσοτικής μεταβλητής X , τις οποίες ομαδοποιούμε σε 5 ισοπλατείς κλάσεις, όπως παρουσιάζονται στον **Πίνακα I**, όπου $f_i \%$, $i = 1,2,3,4,5$ είναι οι σχετικές συχνότητες επί τοις εκατό των αντιστοίχων κλάσεων. Θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες. Δίνεται ότι :

- Το ποσοστό των παρατηρήσεων του δείγματος που είναι μικρότερες του 10 είναι 10%.
- Το ποσοστό των παρατηρήσεων του δείγματος που είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 16 είναι 30%.
- Στο κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων, η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στην 3^η κλάση είναι 108° .
- Η μέση τιμή των παρατηρήσεων του δείγματος είναι $\bar{x} = 14$.

Κλάσεις	fi%
[8 , 10)	
[10 , 12)	
[12 , 14)	
[14 , 16)	
[16 , 18)	

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f_1\% = 10$, $f_2\% = 10$, $f_3\% = 30$, $f_4\% = 20$, $f_5\% = 30$. Δεν είναι απαραίτητο να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον **Πίνακα Ι** συμπληρωμένο.

Μονάδες 6

Γ2. Να εξετάσετε αν το δείγμα των παρατηρήσεων είναι ομοιογενές.

Δίνεται ότι $\sqrt{6,6} \cong 2,57$.

Μονάδες 7

Γ3. Έστω x , x_2 , x_3 και x_4 τα κέντρα της 1^{ης}, 2^{ης}, 3^{ης} και 4^{ης} κλάσης αντίστοιχα και v_1 , v_2 , v_3 και v_4 οι συχνότητες της 1^{ης}, 2^{ης}, 3^{ης} και 4^{ης} κλάσης αντίστοιχα.

Αν $\sum_{i=1}^4 x_i v_i = 1780$, βρείτε το πλήθος ν των παρατηρήσεων του δείγματος.

Μονάδες 5

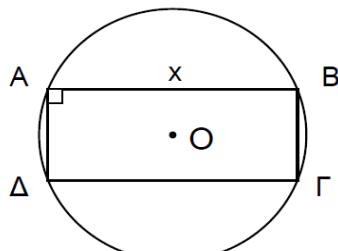
Γ4. Έστω α , α_2 , α_3 , α_4 , α_5 πέντε τυχαία επιλεγμένες παρατηρήσεις διαφορετικές μεταξύ τους από το παραπάνω δείγμα ν παρατηρήσεων. Ορίζουμε ως $\bar{\alpha}$ τη μέση τιμή των πέντε αυτών παρατηρήσεων και S_α την τυπική τους απόκλιση.

Εάν, $\beta_i = \frac{\alpha_i - \bar{\alpha}}{S_\alpha}$ για $i = 1, 2, 3, 4, 5$, να δείξετε ότι η μέση τιμή $\bar{\beta}$ του δείγματος β_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$ είναι ίση με 0 και η τυπική του απόκλιση S_β είναι ίση με 1.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται κύκλος (O, r) με κέντρο O και ακτίνα $r=5$ και ορθογώνιο $ABΓΔ$ εγγεγραμμένο στον κύκλο αυτόν με πλευρά $AB=x$, όπως φαίνεται στο **Σχήμα I**.



ΣΧΗΜΑ Ι

Δ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου $ABΓΔ$, ως συνάρτηση του x , δίνεται από τον τύπο $f(x) = x \cdot \sqrt{100 - x^2}$, $0 < x < 10$.

Μονάδες 4

Δ2. Να βρείτε την τιμή του x για την οποία το εμβαδόν του ορθογωνίου $ABΓΔ$ γίνεται μέγιστο. Για την τιμή αυτήν του x , δείξτε ότι το ορθογώνιο $ABΓΔ$ είναι τετράγωνο.

Μονάδες 5

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - \sqrt{99}}{98x}$.

Μονάδες 8

Δ4. Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω . Αν $P(A-B) > 0$, να δείξετε ότι

$$f\left(\frac{P(A-B)}{\sqrt{100 - P^2(A)}}\right) \leq f\left(\frac{P(A)}{\sqrt{100 - P^2(A-B)}}\right)$$

Μονάδες 8